ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΟΡΙΟ – ΣΥΝΕΧΕΙΑ

1) Έστω f:R→R μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση με 0<f(x)≤1, για κάθε x∈R. Να αποδείξετε ότι η $g(x)=\frac{f(x)}{1+f^2(x)}$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

2) Έστω οι συναρτήσεις f,g:R→R, για τις οποίες ισχύει $f(x)=3+(g(x)-2x)^2$, για κάθε x∈R. Αν η γραφική παράσταση της g έχει με την ευθεία y=2x ένα, τουλάχιστον, κοινό σημείο, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

3) Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f

β) Να βρείτε τα x∈R για τα οποία $f(x)=f^{-1}(x)$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3x+2)>1$

δ) Να βρείτε το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει τον άξονα x’x

4) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x+1}{x^2-1} & ,x<-1\\ \ln(x+\beta) & ,x\geq -1\end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0=-1$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\frac{x^2+k^2}{x}$, k>0.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

β) Να βρείτε τα $\lim_{x\to 0} f(x)$ και

γ) Να αποδείξετε ότι f(x)-lnx>0 και να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$

6) Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^{x}+2^{x+1}}{a^{x+1}+2^{x}}$$, αν α>0

7) Δίνεται η συνάρτηση f:(0,+∞)→R, για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)=\ln x$, για κάθε x>0. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0=1$

8) Έστω το πολυώνυμο $P(x)=ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με α>0, δ<0 και β+δ>α+γ. Να αποδείξετε ότι το P(x) έχει τρεις πραγματικές ρίζες άνισες εκ των οποίων η μία είναι θετική και οι δύο αρνητικές.

9) Υπολογίστε το $\lim_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda(e-2)}{2(2+\eta\mu\lambda)}$

10) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f:R→R με $f(2)=3^{-10}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει θετικός αριθμός α τέτοιος ώστε για κάθε x∈(2-α,2+α) η f(x) είναι θετική.